

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ  
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ЛГПУ»)

Институт физико-математического образования, информационных и  
обслуживающих технологий  
Кафедра фундаментальной математики

УТВЕРЖДАЮ

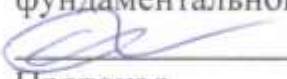
Врио директора Института физико-  
математического образования,  
информационных и обслуживающих  
технологий

В.А. Журавлева  
« 17 » 2025 г.



Приложение к рабочей программе учебной дисциплины  
**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**  
для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации  
обучающихся по дисциплине  
Алгебры Ли и группы лиева типа

По направлению подготовки	01.04.01 Математика
Магистерская программа	—
Квалификация выпускника	магистр
Форма обучения	очная
Курс	2 курс

Разработчик  
Доцент, Давыскиба О.В.  
Заведующий кафедрой  
фундаментальной математики  
 Темникова С.В.  
Протокол  
от « 13 » сентября 2025 г. № 7

Луганск 2025

## 1. ПАСПОРТ ФОНДА ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ

### 1.1. Область применения

Фонд оценочных средств (ФОС) – неотъемлемая часть рабочей программы дисциплины (модуля) «Алгебра Ли и группы лиева типа» и предназначен для контроля и оценки образовательных достижений студентов, освоивших программу дисциплины (модуля).

### 1.2. Цели и задачи фонда оценочных средств

Цель ФОС – установить соответствие уровня подготовки обучающегося требованиям ФГОС ВО магистратура по направлению подготовки 01.04.01 Математика, утвержденным приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 12 (с изменениями и дополнениями).

### 1.1. Перечень компетенций, формируемых в процессе освоения основной образовательной программы

Процесс освоения дисциплины направлен на овладение следующими компетенциями:

Код по ФГОС ВО	Индикатор достижения
Профессиональные	
ПК-1 – способен применять результаты научных исследований при решении профессиональных задач, самостоятельно осуществлять научное исследование	ПК-1.1. Умеет математически корректно формулировать и решать основные профессиональные задачи на основе результатов научных исследований в области математики. ПК-1.2. Способен самостоятельно планировать и осуществлять научное исследование, направленное на решение профессиональных задач, на основе отбора и использования результатов перспективных научных исследований в области фундаментальной математики и современных цифровых технологий.

### 1.4. Этапы формирования компетенций и средства оценивания уровня их сформированности

Этапы формирования компетенций	Компетенции	Контрольно-оценочные средства / способ оценивания
Тема 1. Системы корней и группы Вейля	ПК-1	Домашние задания, контрольная работа, устный опрос, зачет
Тема 2. Алгебры Ли и их подалгебры	ПК-1	Домашние задания, контрольная работа, устный опрос, зачет
Тема 3. Алгебры и группы Шевалле.	ПК-1	Домашние задания, контрольная работа,

		устный опрос, зачет
<b>Тема 4.</b> Автоморфизмы групп Шевалле.	ПК-1	Домашние задания, контрольная работа, устный опрос, зачет
<b>Тема 5.</b> Скрученные группы Шевалле.	ПК-1	Домашние задания, контрольная работа, устный опрос, зачет
<b>Тема 6.</b> Группы лиева типа ранга 1.	ПК-1	Домашние задания, контрольная работа, устный опрос, зачет
Промежуточная аттестация	ПК-1	Экзамен (письменный)

### 1.5. Описание показателей формирования компетенций

Код компетенции	Результаты сформированности
ПК-1. Способен применять результаты научных исследований при решении профессиональных задач, самостоятельно осуществлять научное исследование	<p><b>Знает:</b> ключевые принципы формирования образовательной среды; основные понятия, методы и строгие доказательства фактов основных разделов дисциплины;</p> <p><b>Умеет:</b> использовать результаты научных исследований при решении конкретных образовательных и исследовательских задач; применять теоретические знания к решению задач по данной дисциплине;</p> <p><b>Владеет навыками:</b> современными методами науки для самостоятельного научного исследования; различными приемами использования идеологии дисциплины к доказательству теорем и решению задач курса.</p>

### 1.6. Критерии оценивания компетенций на разных этапах их формирования

Вид учебной работы	Количество баллов		
	ОФО	О-ЗФО	ЗФО
Устные ответы на семинарских занятиях			
Выполнение и защита практических/лабораторных работ	30		
Самостоятельная работа	20		
Иные виды учебной работы (подготовка презентации, написание реферата, решение зад и др.)			
Экзамен (письменный)	50		
<b>Всего за семестр</b>	<b>100</b>		

### Накопительная система оценивания по 100-балльной шкале

Четырехбалльная система оценивания экзамена	100-балльная шкала	Буквенная шкала, соответствующая 100-балльной шкале	Система оценивания зачета
Отлично	90–100	А – отлично – теоретическое содержание курса	

		освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено числом баллов, близким к максимальному	Зачтено
Хорошо	<b>83–89</b>	<b>В</b> – очень хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения большинства из них оценено числом баллов, близким к максимальному	
Хорошо	<b>75–82</b>	<b>С</b> – хорошо – теоретическое содержание курса освоено полностью; некоторые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно; все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения ни одного из них не оценено минимальным числом баллов, некоторые виды заданий выполнены с ошибками	
Удовлетворительно	<b>63–74</b>	<b>D</b> – удовлетворительно – теоретическое содержание дисциплины освоено частично, но пробелы не носят существенного характера; необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, содержат ошибки	
Удовлетворительно	<b>50–62</b>	<b>Е</b> – посредственно – теоретическое содержание курса освоено частично; некоторые практические навыки работы не сформированы, многие предусмотренные программой обучения учебные задания не выполнены либо качество выполнения некоторых из них оценено числом баллов, близким к минимальному	
Неудовлетворительно	<b>21–49</b>	<b>FX</b> – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса освоено частично; необходимые практические навыки работы не сформированы; большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий не выполнено либо качество их выполнения оценено числом баллов, близким к минимальному; при дополнительной самостоятельной работе над материалом курса возможно повышение	Не зачтено

		качества выполнения учебных заданий	
Неудовлетворительно	<b>0–20</b>	<b>Ф</b> – неудовлетворительно – теоретическое содержание курса не освоено; необходимые практические навыки работы не сформированы; все выполненные учебные задания содержат грубые ошибки, дополнительная самостоятельная работа над материалом курса не приведет к какому-либо значимому повышению качества выполнения учебных заданий	

## 2. КОНТРОЛЬНО-ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА

### 2.1. Оценочные средства текущего контроля

#### *Примерные задания для контрольных работ:*

- В циклической группе порядка 20 найти все элементы  $a$ , такие что  $a^4 = e$  и все элементы порядка 4.
- Найти классы сопряженных элементов в группе  $A_4$ .
- Выяснить какие из перечисленных циклических групп  $\langle a \rangle$ , порожденных элементом  $a \in G$ , изоморфны:
  - $G = \mathbf{C}^*$ ,  $a = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ ;
  - $G = \mathbf{C}^*$ ,  $a = \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}$ ;
  - $G = \mathbf{R}^*$ ,  $a = -3\pi$ ;
  - $G = \mathbf{C}^*$ ,  $a = 7 - i$ ;
  - $G = S_6$ ,  $a = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ;
  - $G = \mathbf{Z}$ ,  $a = -310$ ;
  - $G = GL(\mathbf{R})$ ,  $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ;
- Найти все силовские 3-подгруппы в  $S_4$ .
- Найти порядок элемента  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$ .
- Определить является отображение  $f: \mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{R}^*$  гомоморфизмом групп или нет, найти ядро и образ:
  - $f(z) = |\bar{z}|^2$ ;
  - $f(z) = -|z|$ ;
  - $f(z) = 1$ ;
  - $f(z) = 3$ .
- Доказать изоморфизм  $\mathbf{C}^* \rightarrow \mathbf{R}^+ \cong T^4$ .
- Найти централизатор подстановки  $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$  в  $S_4$ .
- Выяснить является множество с операцией группой или нет.

10. В группе  $GL_2(\mathbf{R})$  найти централизатор матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .
11. Найти все гомоморфные отображения  $\mathbf{Z}_9 \rightarrow \mathbf{Z}_{36}$ .
12. Доказать, что группа конечна  $\langle a, b \mid a^8, b^2 a^2, b^{-1} a b a \rangle$ .
13. Доказать, что группу  $S_3$  можно задать следующими образующими и соотношениями:  $\langle a, b \mid a^2, b^3, a^{-1} b a b a^{-2} \rangle$ .
14. Доказать, что группа порядка 115 является циклической.
15. Найти левые и правые смежные классы в  $S_3$  по подгруппе  $\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rangle$ .
16. Пользуясь основной теоремой о конечных абелевых группах, найти все (с точностью до изоморфизма) абелевы группы порядка 40.
17. Изоморфны ли группы  $\mathbf{Z}_{12} \oplus \mathbf{Z}_{36}$  и  $\mathbf{Z}_{18} \oplus \mathbf{Z}_{24}$ .
18. Доказать, что любая группа порядка 63 разрешима.
19. Доказать, что не существует простых групп порядка 80.
20. Найти количество элементов заданного порядка в заданной группе.
21. Найти все орбиты и стабилизаторы группы  $G$ , порожденной подстановкой
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 & 9 & 6 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$$
и действующей на множестве  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .
22. Найти все подгруппы циклической группы порядка 36.
23. Найти нормальные подгруппы в  $S_4$ .
24. Найти порядок элемента  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbf{C}^*$ .
25. Доказать изоморфизм  $GL_n(\mathbf{R}) \rightarrow SL_n(\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^*$ .

## 2.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации

### Вопросы к экзамену.

1. Основные алгебраические системы: группы, кольца, поля, алгебры.
2. Теорема о свойствах классов эквивалентности.
3. Определение системы корней евклидова пространства, фундаментальной системы корней, положительной системы корней. Доказать, что каждая положительная система корней содержит единственную фундаментальную систему.
4. Доказать, что в любой системе корней каждый корень является линейной комбинацией фундаментальных корней с целыми коэффициентами.
5. Доказать, что: а) отражение  $w_i$  переводит каждый положительный корень  $\Phi^+$  в положительный, б) каждый корень является образом некоторого фундаментального корня относительно некоторого элемента из группы Вейля, в) группа Вейля порождается фундаментальными отражениями.

6. Определение ранга системы корней, подсистемы, эквивалентных, приведенных, не приведенных, систем. Доказать, что с точностью до эквивалентностей, существуют единственная приведенная и единственная не приведенная системы корней ранга 1.
7. Определение разложимой, неразложимой системы корней. Доказать теорему о классификации систем корней ранга 2.
8. Определение и свойства функции  $n(w)$ . Доказать, что  $n(w) = l(w)$ .
9. Доказать, что для любых двух фундаментальных систем существует единственный элемент группы Вейля, переводящий одну систему в другую.
10. Существование и единственность элемента группы Вейля, переводящего систему положительных корней в систему отрицательных корней.
11. Два способа (один - с доказательством) задания группы Вейля порождающими элементами и определяющими отношениями.
12. Определение параболической подгруппы группы Вейля.
13. Свойства подгрупп  $W_j$  группы Вейля.
14. Комплекс Кокстера. Геометрическое описание параболических подгрупп группы Вейля.
15. Определение алгебры Ли.
16. Классификация простых комплексных алгебр Ли.
17. Теоремы существования и изоморфизма простых комплексных алгебр Ли.
18. Понятие базиса Шевалле.
19. Основные соотношения в группе Шевалле.
20. Понятие  $\Phi^+$ -матрицы.
21. Определение BN-пары. Доказать, что если  $G$  - группа с BN-парой, то  $G = BNB$ .
22. Критерий совпадения двойных смежных классов  $BnB$  в группе с BN-парой.
23. Доказать, что в группе с BN-парой подгруппы, содержащие подгруппу  $B$ , исчерпываются подгруппами вида  $PJ$ .
24. Доказать признак простоты группы с BN-парой.
25. Графовые, полевые и диагональные автоморфизмы группы Шевалле.
26. Теорема о строении произвольного автоморфизма группы Шевалле над конечным полем. Схема доказательства.
27. Скрученные системы корней и их группы Вейля.
28. Скрученные группы Шевалле, их основные подгруппы.
29. BN-пары в скрученных группах Шевалле.
30. Строение аналогов корневых, унитарных подгрупп скрученных групп Шевалле.
31. Условия принадлежности элемента  $h(\%)$  подгруппе  $H_1$ .
32. Группы Ли типа ранга 1.
33. Теорема о периодических подгруппах группы  $PGL_2(F)$ . Схема ее доказательства.
34. Разрешимые подгруппы группы  $Re(q)$ .
35. Классы сопряженных подгрупп группы  $Re(q)$ .
36. Неразрешимые подгруппы группы  $Re(q)$ .

37. Определение группы Кокстера.
38. Определение формы Киллинга,
39. Определение простой алгебры Ли.
40. Разложение Картана простой комплексной алгебры Ли.
41. Понятие алгебры Шевалле,
42. Понятие группы Шевалле.
43. Коммутаторная формула Шевалле.
44. Унипотентная, диагональная, мономиальная подгруппы группы Шевалле.
45. Подгруппа Бореля.
46. Единственность разложения элемента унипотентной подгруппы группы Шевалле в произведение корневых, расположенных в соответствии с фиксированным (произвольным) упорядочением корней.
47. Понятие алгебры  $N\Phi(K)$ , присоединенной группы  $N\Phi(K)$ .
48. Леммы об определяющих соотношения присоединенных групп  $N\Phi(K)$ .
49. Представления скрученных групп.
50. Формулы умножения элементов из аналогов корневых подгрупп групп Шевалле.
51. В циклической группе порядка 20 найти все элементы  $a$ , такие что  $a^4 = e$  и все элементы порядка 4.
52. Найти классы сопряженных элементов в группе  $A_4$ .
53. Найти все силовские 3-подгруппы в  $S_4$ .
54. Найти порядок элемента  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$ .
55. Определить является отображение  $f: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$  гомоморфизмом групп или нет,
56. Найти ядро  $f(z) = |\bar{z}|^2$ ;
57. Найти образ:  $f(z) = 1$ ;
58. Найти централизатор подстановки  $(1 \ 4 \ 2)$  в  $S_4$ .
59. Выяснить является множество с операцией группой или нет.
60. В группе  $GL_2(\mathbb{R})$  найти централизатор матрицы  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .
61. Найти все гомоморфные отображения  $\mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_{36}$ .
62. Доказать, что группа конечна  $\langle a, b \mid a^8, b^2 a^2, b^{-1} a b a \rangle$ .
63. Найти левые и правые смежные классы в  $S_3$  по подгруппе  $\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ .
64. Пользуясь основной теоремой о конечных абелевых группах, найти все (с точностью до изоморфизма) абелевы группы порядка 40.
65. Изоморфны ли группы  $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{36}$  и  $\mathbb{Z}_{18} \oplus \mathbb{Z}_{24}$ .
66. Доказать, что любая группа порядка 63 разрешима.
67. Найти все орбиты и стабилизаторы группы  $G$ , порожденной подстановкой



$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 & 9 & 6 & 10 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

и действующей на множестве  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

68. Найти все подгруппы циклической группы порядка 36.

69. Найти нормальные подгруппы в  $S_4$ .

70. Найти порядок элемента  $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$ .